BENDA TEGAR

Bahan Cakupan

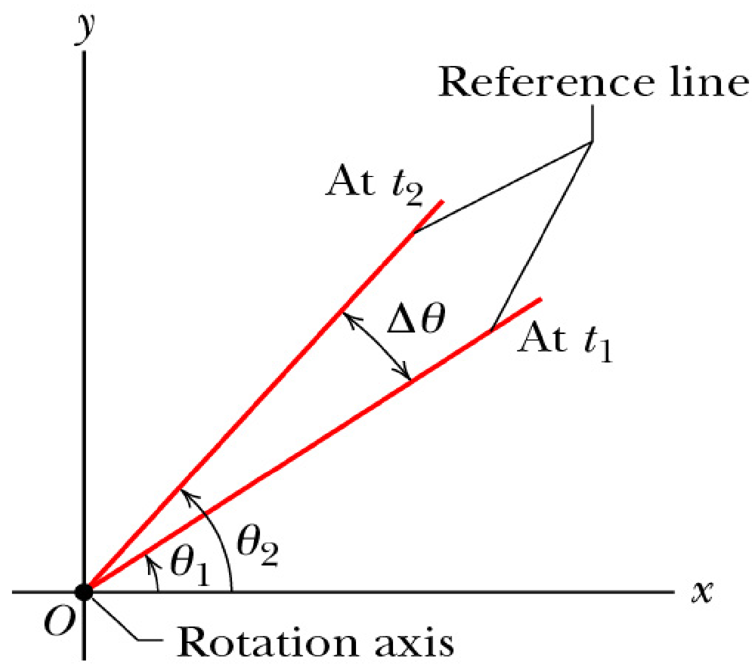
- Gerak Rotasi
- Vektor Momentum Sudut
- Sistem Partikel
- Momen Inersia
- Dalil Sumbu Sejajar
- Dinamika Benda Tegar
- Menggelinding
- Hukum Kekekalan Momentum Sudut Benda Tegar
- Statika Benda Tegar

Gerak Rotasi & Pergeseran Sudut

- Tinjau dahulu besaran-besaran vektor gerak rotasi.

- Dalam proses rotasi, pergeseran sudut:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$



- Satuan SI untuk pergeseran sudut adalah radian (rad)

$$1\,\text{rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57{,}3^\circ$$

Gerak Rotasi & Pergeseran Sudut

- kecepatan sudut rata-rata:

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

- kecepatan sudut sesaat:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

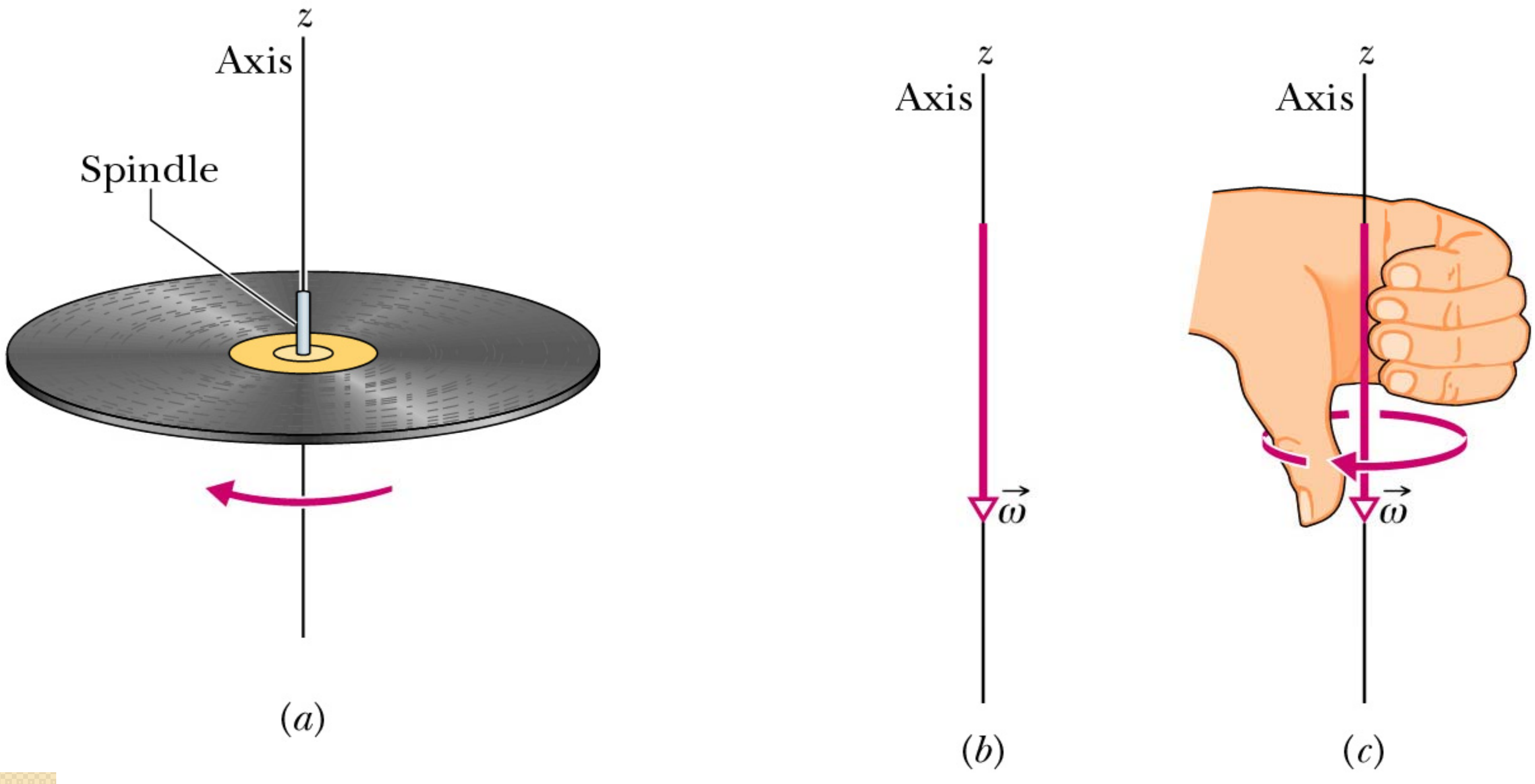
Satuan SI untuk kecepatan sudut adalah
radian per detik (rad/s)

Arah kecepatan sudut sama dengan arah pergeseran sudut.

Gerak Rotasi & Pergeseran Sudut

Arah kecepatan sudut:

<u>Aturan tangan kanan</u>



Gerak Rotasi & Pergeseran Sudut

- Percepatan sudut rata-rata:

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

- Percepatan sudut sesaat:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Satuan SI untuk percepatan sudut adalah
radian per detik (rad/s^2)

Arah percepatan sudut sama dengan arah kecepatan sudut.

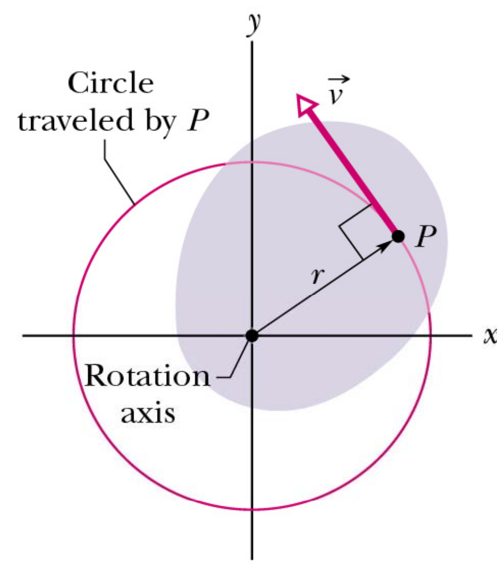
Persamaan Kinematika Rotasi

Angular	Linear
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	$v^2 = v_0^2 + 2ax$
$\overline{\omega} = \dfrac{\omega + \omega_0}{2}$	$\overline{v} = \dfrac{v + v_0}{2}$

Perumusan Gerak Rotasi

Kecepatan tangensial:

$$\underbrace{v}_{\text{kecepatan linear}} = \underbrace{r\omega}_{\text{kecepatan tangensial}} \quad (\omega \text{ dalam rad/s})$$

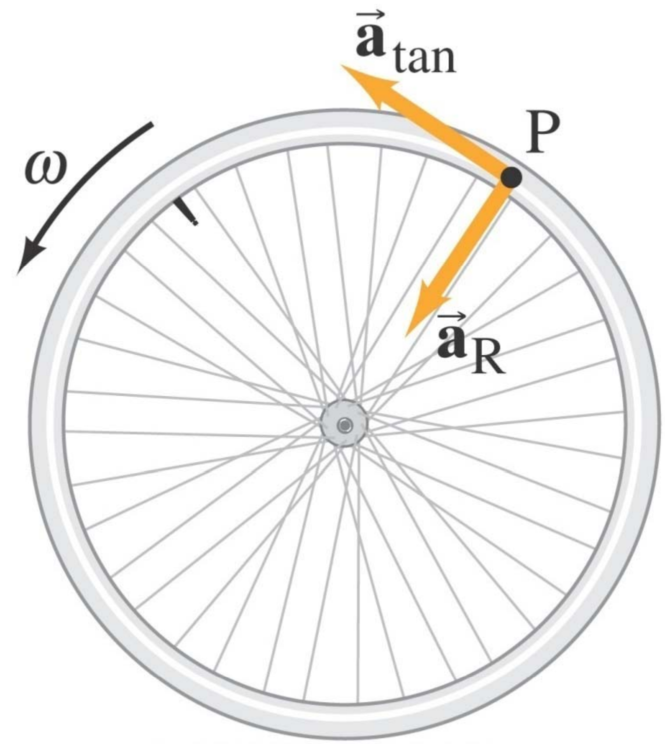


$$\underbrace{a}_{\text{percepatan linear}} = \underbrace{r\alpha}_{\text{percepatan tangensial}} \quad (\alpha \text{ dalam rad/s}^2)$$

Perumusan Gerak Rotasi

- Percepatan sentripetal (dng arah radial ke dalam):

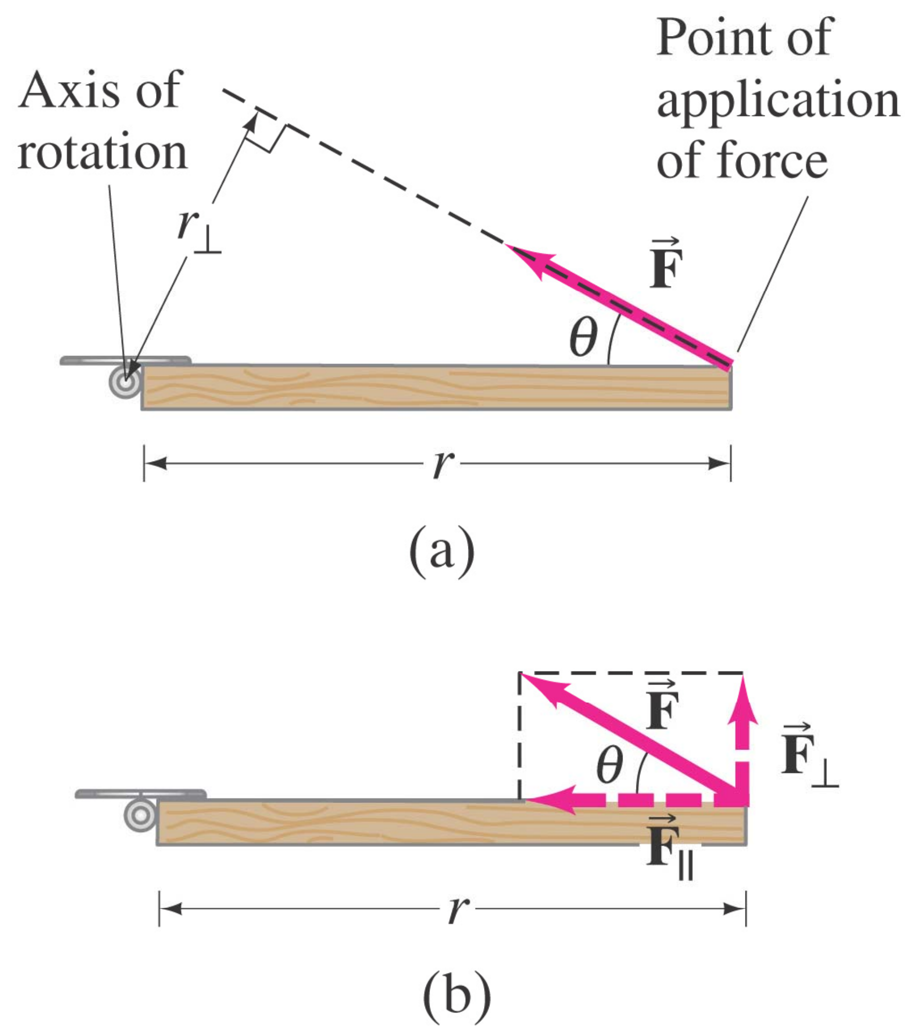
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$



Torsi – Momen gaya

- Torsi didefenisikan sebagai hasil kali besarnya gaya dengan panjangnya lengan

$$\tau = r_{\perp} F$$



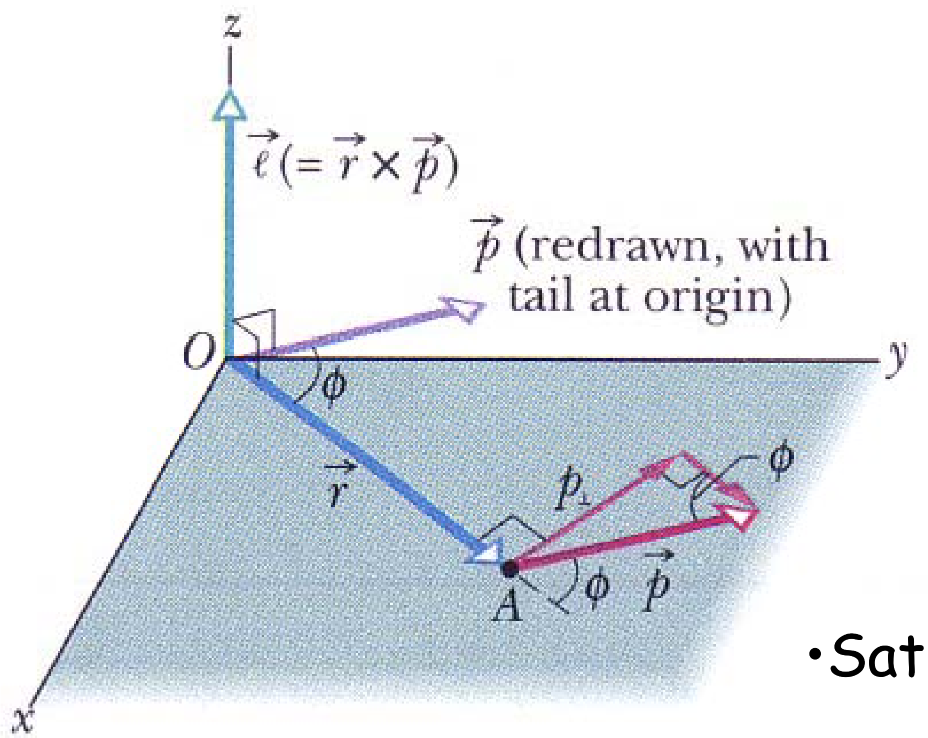
Torsi – Momen gaya

- Torsi berarah positif apabila gaya menghasilkan rotasi yang berlawanan dengan arah jarum jam.
- Satuan SI dari Torsi: newton.m (N.m)

Vektor Momentum Sudut

- Momentum sudut L dari sebuah benda yang berotasi tehadap sumbu tetap didefenisikan sbb:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$



$$\begin{aligned} l &= mvr\sin\phi \\ &= rp_\perp = rmv_\perp \\ &= r_\perp p = r_\perp mv \end{aligned}$$

- Satuan SI adalah Kg.m^2/s.

Vektor Momentum Sudut

- Perubahan momentum sudut terhadap waktu diberikan oleh:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}\right)}_{\substack{=(\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) \\ =0}} + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)$$

Jadi $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ ingat $\mathbf{F}_{EXT} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$

Vektor Momentum Sudut

- Perubahan momentum sudut terhadap waktu diberikan oleh:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times F_{EXT}$$

Akhirnya kita peroleh:

$$\boxed{\tau_{EXT} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}}$$

Analog dengan $\mathbf{F}_{EXT} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$!!

Hukum Kekekalan Momentum Sudut

$$\boxed{\tau_{EXT} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}}$$ dimana $\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}}$ dan $\boxed{\tau_{EXT} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{EXT}}$

- Jika torsi resultan = nol, maka $\tau_{EXT} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$

Hukum kekekalan momentum sudut

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Hukum Kekekalan Momentum

Linear

- **Jika $\Sigma F = 0$, maka p konstan.**

Rotasi

- **Jika $\Sigma\tau = 0$, maka L konstan.**

Momentum Sudut: Defenisi & Penurunan

$p = mv$

Untuk gerak linear sistem partikel berlaku

$$\boldsymbol{F}_{EXT} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \Rightarrow$$

Momentum kekal jika

$$\boldsymbol{F}_{EXT} = 0$$

Bagaimana dng Gerak Rotasi?

Untuk Rotasi, Analog gaya ***F*** adalah Torsi $\tau = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

Analog momentum ***p*** adalah momentum sudut $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$

Sistem Partikel

- Untuk sistem partikel benda tegar, setiap partikel memiliki kecepatan sudut yang sama, maka momentum sudut total:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \cdots\cdots + \vec{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{net,i} = \vec{\tau}_{net}$$

Perubahan momentum sudut sistem hanya disebabkan oleh torsi gaya luar saja.

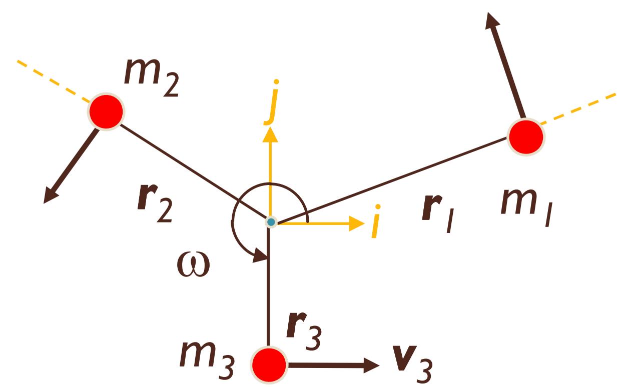
Sistem Partikel

Perhatikan sistem partikel benda tegar yg berotasi pada bidang *x-y*, sumbu rotasi *z*. Total momentum sudut adalah jumlah masing2 momentum sudut partikel:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i r_i v_i \hat{k}$$ (krn r_i dan v_i tegak lurus)

Arah $\mathbf{L}$ sejajar sumbu *z*

Gunakan $v_i = \omega\, r_i$, diperoleh



$$\boxed{\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}}$$

Analog dng $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$!!

Vektor Momentum Sudut

- DEFINISI

  Momentum sudut dari sebuah benda yang berotasi tehadap sumbu tetap adalah hasil kali dari momen inersia benda dengan kecepatan sudut terhadap sumbu rotasi tersebut.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- Demikan juga dengan torsi (Hk II Newton untuk gerak rotasi):

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

Vektor Momentum Sudut

$$\boxed{L = I\omega}$$

- Jika tidak ada torsi luar, *L* kekal. Artinya bahwa hasil perkalian antara *I* dan ω kekal

$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$\boxed{L = I\omega}$$

$$\boxed{L = I\omega}$$

Momen Inersia

Momen Inersia bagi suatu sistem partikel benda tegar didefenisikan sebagai

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$$

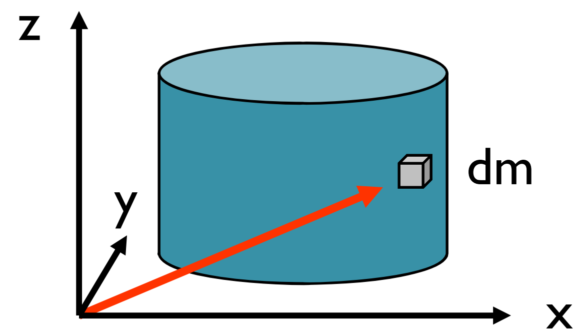
I = momen inersia benda tegar,
menyatakan ukuran inersial sistem untuk berotasi terhadap sumbu putarnya

Momen Inersia

Untuk benda yang mempunyai distribusi massa kontinu, momen inersianya diberikan dalam bentuk integral

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \Rightarrow I = \int r^2 dm$$

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$$



Dimana Elemen Volume

$$dV = rdr \cdot d\theta \cdot dl$$

Momen Inersia

$$dV = rdr \cdot d\theta \cdot dl$$

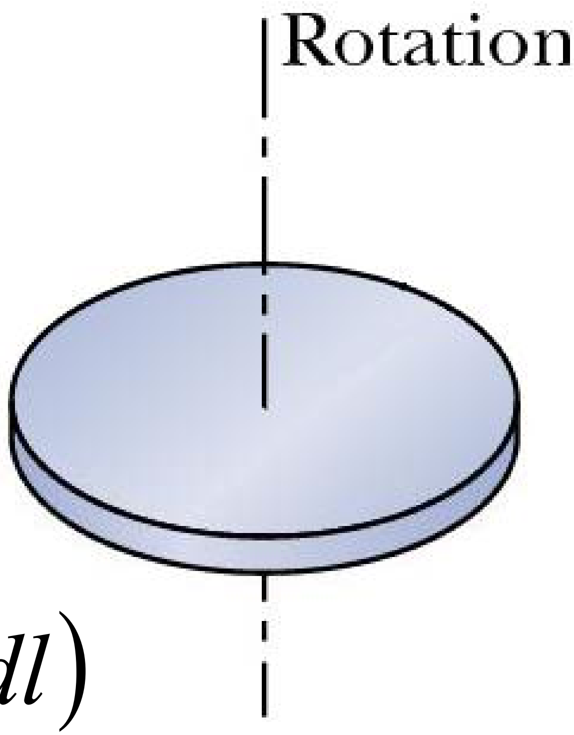
- dimana *rdr* : perubahan radius,
- $d\theta$: perubahan sudut,
- *dl* : perubahan ketebalan.

Momen Inersia

Untuk lempengan benda dibawah ini, momen inersia dalam bentuk integral

$$I = \int r^2 \rho \left(rdr \cdot d\theta \cdot dl \right)$$

Asumsi rapat massa ρ konstan



- Kita dapat membaginya dalam 3 integral sbb:

$$I = \rho \int_0^R r^2 \left(rdr \right) \cdot \int_0^{2\pi} \left(d\theta \right) \cdot \int_0^L \left(dl \right)$$

Momen Inersia

Hasilnya adalah

$$I = \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot [l]_0^L$$

Massa dari lempengan tersebut

$$I = \rho \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi \cdot L$$

$$M = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot L$$

Momen Inersia benda

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

Dalil Sumbu Sejajar

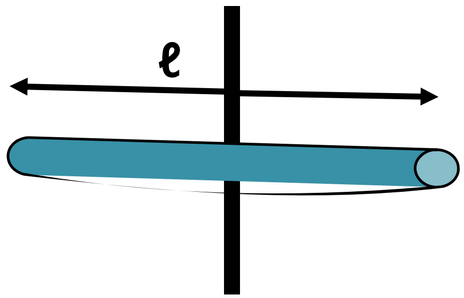
Untuk benda tegar bermassa M yang berotasi terhadap sumbu putar sembarang yang berjarak *h* dari sumbu sejajar yang melalui titik pusat massanya (***I_{CM}*** diketahui), momen inersia benda dapat ditentukan dengan menggunakan:

Dalil Sumbu Sejajar

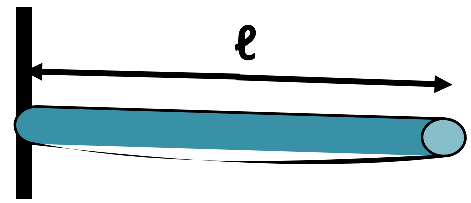
$$I = I_{cm} + Mh^2$$

Momen Inersia:

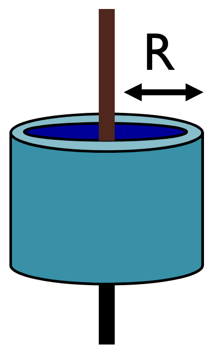
$$I = \frac{1}{12} m l^2$$



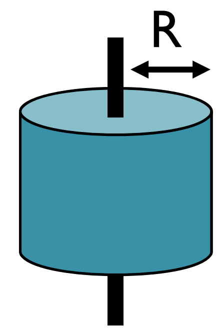
$$I = \frac{1}{3} m l^2$$



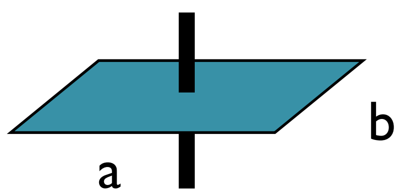
$$I = mR^2$$



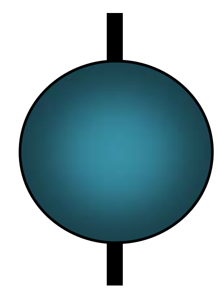
$$I = \frac{1}{2} mR^2$$



$$I = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$



$$I = \frac{2}{5} mR^2$$



Dinamika Benda Tegar

- Mengikuti analog dari gerak translasi, maka kerja oleh momen gaya didefenisikan sbb:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

Energi Kinetik Rotasi

- Suatu benda yang bergerak rotasi, maka energi kinetik akibat rotasi adalah

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

- Dimana I adalah momen inersia,

Energi Kinetik Rotasi

- Linear

$$K = \frac{1}{2} M v^2$$

Massa

Kecepatan Linear

- Rotasi

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Momen Inersia

Kecepatan Sudut

Prinsip Kerja-Energi

- Sehingga, teorema Kerja-Energi untuk gerak rotasi menjadi:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$W = \Delta K_{rotasi}$$ dimana $$K_{rotasi} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Bila $\vec{\tau} = 0$,maka W = 0 sehingga

$$\Delta K_{rot} = 0$$

Hukum Kekekalan En. Kinetik Rotasi

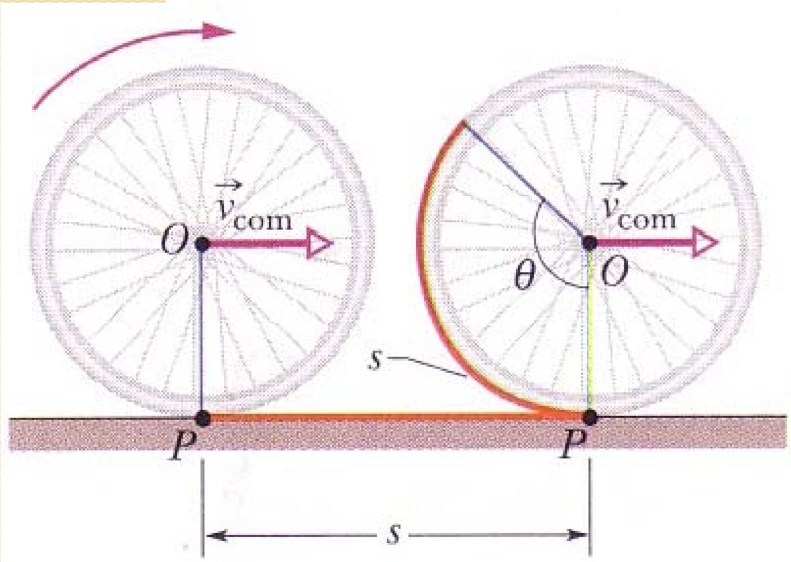
Menggelinding

- Menggelinding adalah peristiwa translasi dan sekaligus rotasi

Gerak Menggelinding: rotasi dan translasi

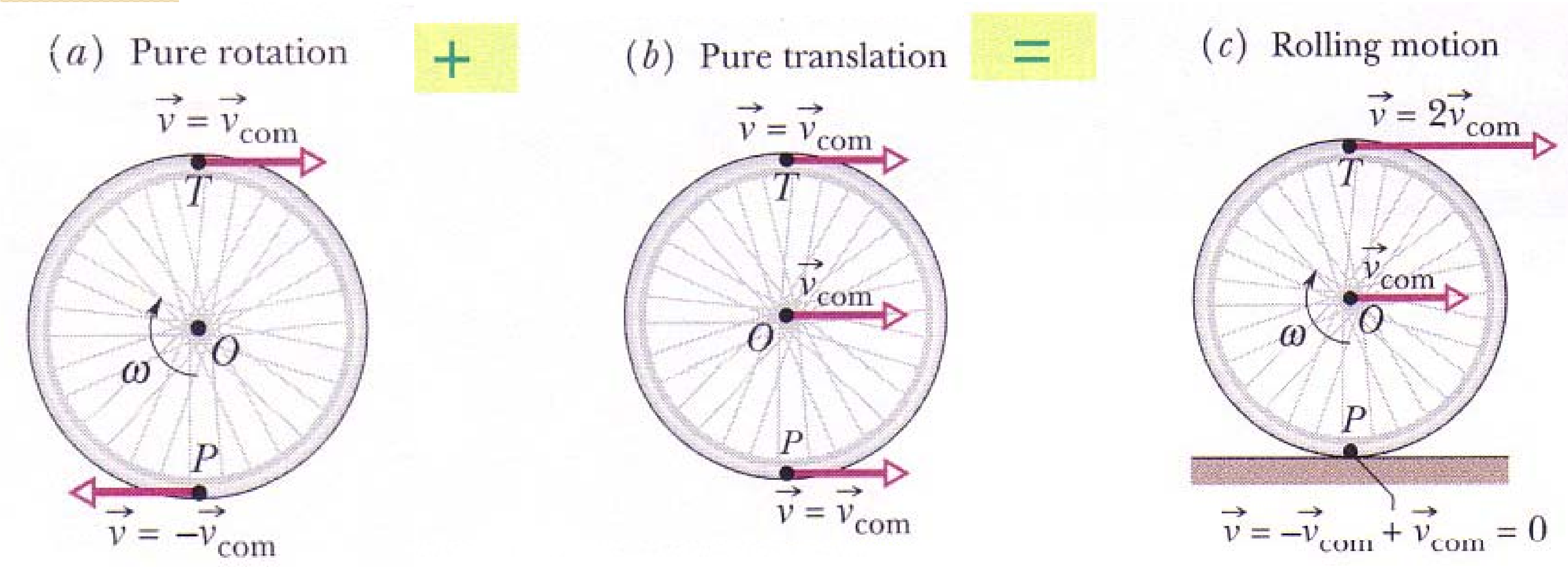
$$s = \theta R$$

Ban bergerak dengan laju ds/dt

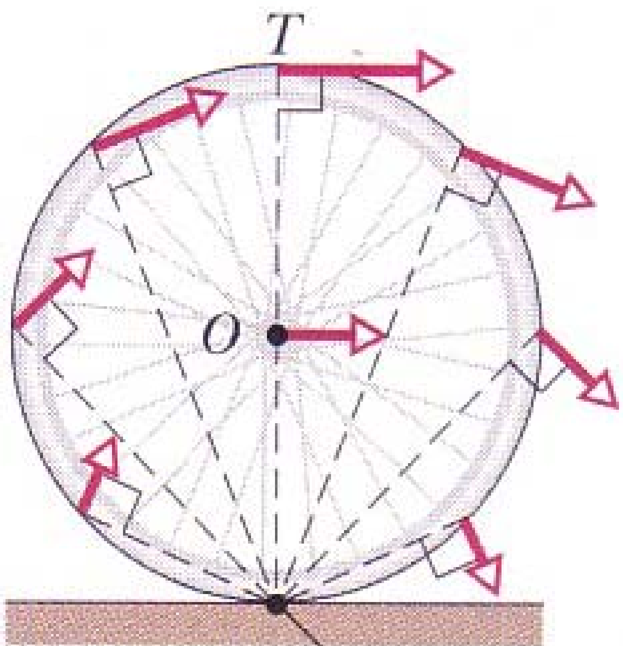


$$\Rightarrow v_{com} = \frac{d\theta}{dt} = \omega R$$

Gerak Menggelinding: rotasi dan translasi



Gerak Menggelinding: rotasi dan translasi



Rotation axis at P

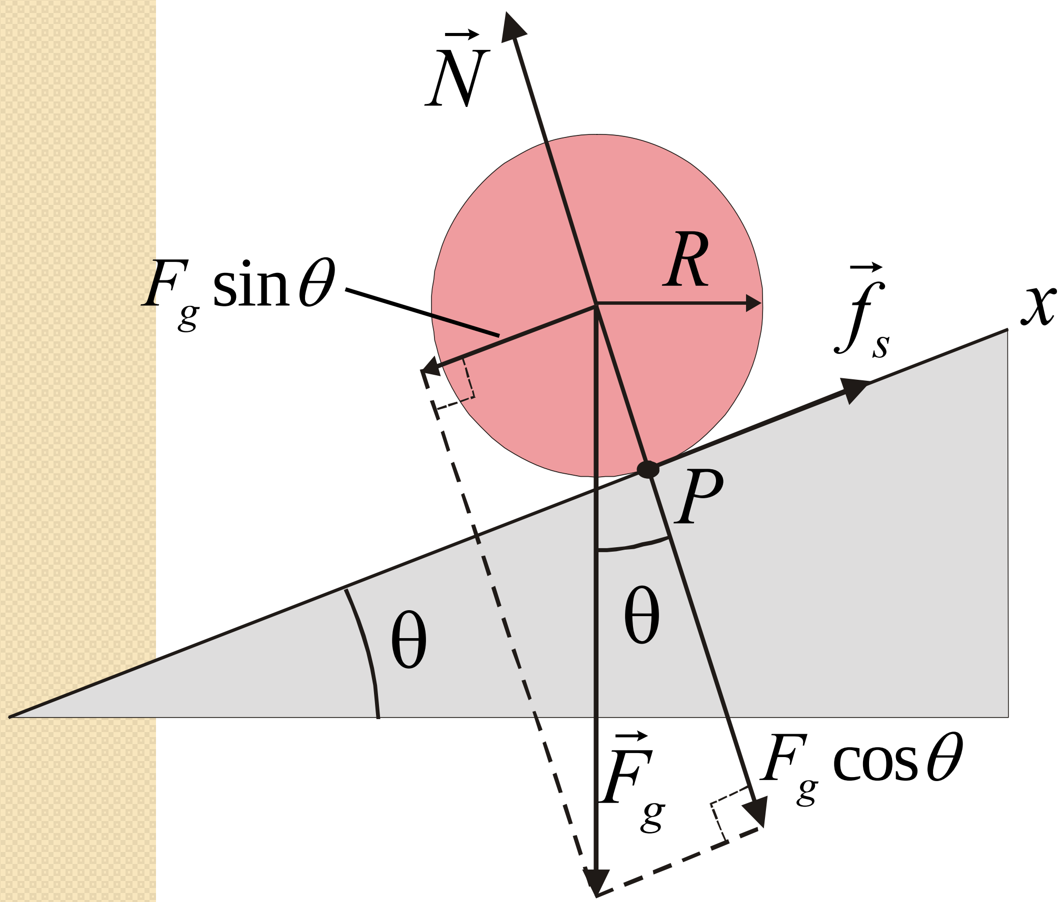
The kinetic energy of rolling

$$K = \tfrac{1}{2} I_P \omega^2 \qquad I_P = I_{com} + MR^2$$

$$K = \tfrac{1}{2} I_{com} \omega^2 + \tfrac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

$$K = \tfrac{1}{2} I_{com} \omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{com}^2 = K_r + K_t$$

Gerak Menggelinding Di Bidang Miring



Gunakan: torsi = $I\,\alpha$

$$R \times F_g \sin\theta = I_P \alpha$$

$$a_{com} = -\alpha R$$

Maka:

$$MR^2 g \sin\theta = -I_P a_{com}$$

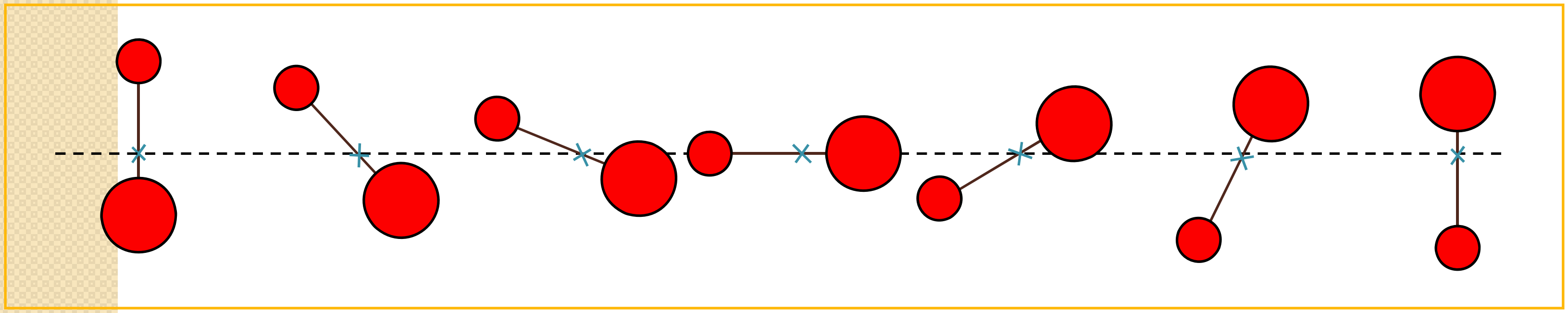
$$I_P = I_{com} + MR^2$$

$$a_{com} = -\frac{g \sin\theta}{1 + I_{com}/MR^2}$$

Menggelinding

- Total energi kinetik benda yang menggelinding sama dengan jumlah energi kinetik translasi dan energi kinetik rotasi.

$$K = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$



Hukum Kekekalan Energi Mekanik Total Dengan Gerak Rotasi

$$\underbrace{E}_{\substack{\text{Total}\\\text{mechanical}\\\text{energy}}} = \underbrace{\tfrac{1}{2}mv^2}_{\substack{\text{Translational}\\\text{kinetic energy}}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}I\omega^2}_{\substack{\text{Rotational}\\\text{kinetic energy}}} + \underbrace{mgh}_{\substack{\text{Gravitational}\\\text{potential energy}}}$$

Kesetimbangan Benda Tegar

- Suatu benda tegar dikatakan setimbang apabila memiliki percepatan translasi sama dengan nol dan percepatan sudut sama dengan nol.
- Dalam keadaan setimbang, seluruh resultan gaya yang bekerja harus sama dengan nol, dan resultan torsi yang bekerja juga harus sama dengan nol:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ dan } \Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma \tau = 0$$

Hubungan Besaran Gerak Linear - Rotasi

Linear		Rotasi
x (m)	$\Longrightarrow$	θ (rad)
v (m/s)	$\Longrightarrow$	ω (rad/s)
a (m/s^2)	$\Longrightarrow$	α (rad/s^2)
m (kg)	$\Longrightarrow$	I (kg m^2)
F (N)	$\Longrightarrow$	τ (N m)
p (N s)	$\Longrightarrow$	L (N m s)

Hubungan Besaran Gerak Linear - Rotasi

	linear	angular
perpindahan	Δx	$\Delta \theta$
kecepatan	$v = dx/dt$	$\omega = d\theta/dt$
percepatan	$a = dv/dt$	$\alpha = d\omega/dt$
massa	m	$I = \sum m_i r_i^2$
gaya	$\vec{F}$	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
Hk. Newton's	$F = ma$	$\tau = I\alpha$
energi kinetik	$K = (1/2)mv^2$	$K = (1/2)I\omega^2$
Kerja	$W = \int F dx$	$W = \int \tau d\theta$